**Анализ цепей Маркова с помощью производящих функций**

Данный метод применяется для получения явного вида эволюции распределения *однородных* марковских цепей. По своему смыслу он очень похож на метод Лапласа решения систем линейных дифференциальных уравнений.

Вектор распределения марковской цепи описывается рекуррентным соотношением

или в явном виде

Однако, «явный» вид (1.2) тоже не позволяет понять явный вид зависимости отдельных элементов матрицы от времени *n*.

**Определение 1.1.** Пусть – числовая последовательность. Тогда *производящей функцией*, соответствующей данной последовательности, называется следующий степенной ряд

где аргумент выбирается из области сходимости ряда.

Так как ряд степенной, то внутри области свой сходимости он сходится равномерно, и его можно почленно интегрировать и дифференцировать. Формула (1.3) также иногда носит название *z-преобразования*. Ниже представлена краткая таблица изображений и оригиналов функций, которые используются при анализе цепей Маркова.

Таблица 1. Таблица z-преобразования.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оригинал** | **Изображение** |
|  | *1* |
| *1* |  |
|  |  |
|  |  |
| *n* |  |
| *nan* |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Производящая функция последовательности векторов распределения имеет вид:

Тогда из (1.1) и (1.4) следует, что

Нужно отметить, что матричнозначная функция в качестве своих компонентов содержит аффинные функции аргумента *z*, поэтому компоненты матричнозначной функции в качестве своих компонентов содержит дробно-рациональные функции: их числитель будет многочленом (*n-1)*-го порядка, в то врем как знаменатель – многочлен *n*-го порядка. Все элементы с помощью метода неопределенных коэффициентов раскладываются в сумму элементарных дробей, для которой по таблице восстанавливается оригинал.

**Пример 1.1.** Матрица переходных вероятностей равна

Найти зависимость

**Решение:**

Поэтому

Каждый элемент матрицы раскладывается на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов:

где пары *(Aij,Bij)* находятся путем решения системы линейных уравнений. Покажем это на примере пары *(A11,B11):*

Необходимо учитывать, что среди корней характеристического уравнения (знаменателя элементов матрицы ) всегда имеется корень *z=1*, а остальные корни принадлежат единичному кругу. Окончательно получаем следующее разложение

Тогда согласно таблице z-преобразования и в силу условия нормировки получаем

И для любого начального условия при для любого начального условия . При этом следует отметить, что эта сходимость имеет экспоненциальную скорость. Если проанализировать эту цепь, то она является конечной неразложимой и апериодичной, т.е. эргодичной, что подтверждает формула (1.6).

**Задание для самостоятельного решения (на данном семинаре)**

1. Найти зависимость для
2. Найти зависимость для
3. Найти зависимость для
4. Найти зависимость для
5. Найти зависимость для

**Домашнее задание**

Студентам обеих групп выполнить задания 1, 2 из файла task504.pdf. Обращаю внимание одной из групп, что это – задание курсовой работы.